Université Paul Sabatier
Licence STS – Parcours PC
Physique – L1

Thèmes 5 et 6 – Oscillations forcées ; résonance ; impédance
2009–2010, durée : 6 h

Conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras

1 – Circuit RL série excité par une tension sinusoïdale

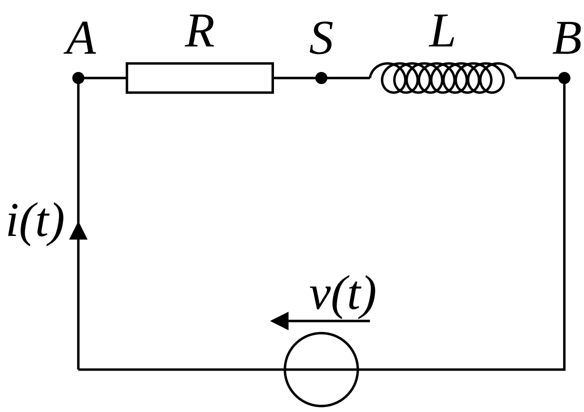

FIG. 1 – *Circuit RL série alimenté par une source de tension sinusoïdale*

Considérons le circuit électrique représenté sur la figure 1 composé d'une résistance $R = 1\ \Omega$ et d'une inductance $L = 1$ mH associées en série. Soit $v(t) = 5\cos(\omega t + \varphi_v)$ la différence de potentiel imposée par un générateur de tension entre les points A et B. Le générateur de tension imposant une différence de potentiel sinusoïdale, il est naturel de noter $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ l'intensité du courant dans le circuit.

1.1 Equation différentielle

A l'aide de la loi d'additivité des tensions, établir l'équation différentielle reliant $v(t)$ à $i(t)$. Dans la suite, nous étudierons uniquement le régime forcé, c'est à dire le régime observé une fois le régime transitoire achevé.

1.2 Régime forcé. Détermination de I_m et φ_i

1. En utilisant la notation complexe, donner les expressions de $\underline{v(t)}$ et de $\underline{i(t)}$. On introduira les amplitudes complexes $\underline{V_m}$ et $\underline{I_m}$.
2. Écrire l'équation différentielle complexe associée à l'équation différentielle établie à la question 1.1.
3. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{I_m}$, son module $|\underline{I_m}|$ et son argument φ_i (on introduira $\varphi = \varphi_i - \varphi_v$).

4. Étudier les variations du module et de l'argument de $\underline{I_m}$ en fonction de la pulsation ω.

1.3 Application au filtrage

1. Calculer l'amplitude complexe $\underline{V_{SB_m}}$ aux bornes de la bobine et son module $|\underline{V_{SB_m}}|$.
2. On définit la fonction de transfert du circuit par le rapport $\underline{T(j\omega)} = \dfrac{\underline{V_{SB_m}}}{\underline{V_m}}$ et le gain du circuit par $G_v = 20\log_{10}|\underline{T(j\omega)}|$. Tracer l'évolution du gain en fonction de ω et déterminer le type du filtre ainsi obtenu.
3. En déduire la fréquence de coupure f_0 pour laquelle $|\underline{V_{SB_m}}| = |\underline{V_{SB_m}}|_{\max}/\sqrt{2}$.

2 – Pendule élastique amorti

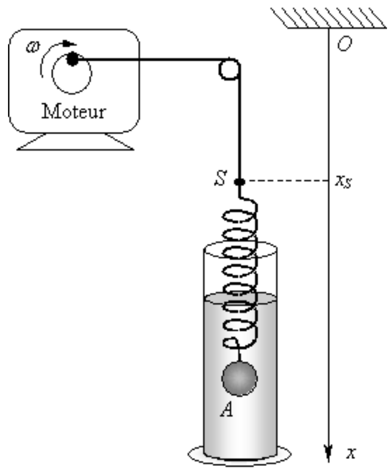

FIG. 2 – *Pendule élastique amorti*

Considérons le système mécanique représenté sur la figure 2. Une sphère de laiton A de masse $m = 2$ kg plongée dans de l'huile est accrochée à un ressort. Ce dernier s'allonge de $\Delta l = 2{,}5$ cm lorsque la sphère A y est suspendue. La position de la sphère peut être repérée à chaque instant sur un axe vertical Ox dirigé vers le bas. L'extrémité supérieure du ressort repérée par le point S de coordonnée x_S, est animée d'un mouvement oscillatoire harmonique d'amplitude égale à 2 mm imposé par un moteur. L'huile exerce sur la sphère une force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse $\mathbf{v}$ du mobile : $\mathbf{F}_f = -\alpha\mathbf{v}$ où $\alpha = 0{,}723$ kg.s^{-1}. La longueur à vide du ressort au repos est notée l_0, sa raideur est notée K. L'accélération de la pesanteur est notée $\mathbf{g}$ et son module vaut $g = 9,8$ m.s^{-2}. On négligera la poussée d'Archimède exercée par l'huile sur la sphère.

2.1 Equation différentielle du mouvement de A

1. En écrivant la loi fondamentale de la dynamique appliquée au mobile A et en projetant cette loi sur l'axe Ox, montrer que le mouvement du mobile est régi par une équation différentielle du deuxième ordre.
2. Pour simplifier l'écriture de cette équation différentielle, on introduira la grandeur $l_1 = l_0 + mg/K$ et on effectuera le changement de variable $X = x - l_1$. À l'aide d'une analyse aux dimensions, vérifier la validité de ces choix. Écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau_e}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 X = \frac{F_m}{m}\cos(\omega t + \varphi_e) \tag{1}$$

   et donner les expressions et les valeurs numériques de τ_e, ω_0 et Fm.

2.2 Détermination de la solution générale de l'équation homogène associée. Régime transitoire

1. Établir l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (1). Donner l'expression de ses racines r_1 et r_2. Ces racines seront écrites sous la forme $a + jb$ ($j^2 = -1$) et on donnera les valeurs numériques de a et b.
2. Quelle est l'expression générale de la fonction $X(t)$ solution de l'équation homogène associée à l'équation (1) ? Tracer l'allure de la courbe représentant $X(t)$.
3. Que devient l'expression de $X(t)$ lorsque $t = 10\tau_e$? Lorsque $t \to \infty$?

2.3 Détermination d'une solution particulière de l'équation différentielle complète. Régime forcé, Résonance

Une fois le régime transitoire totalement amorti, le mobile A va osciller entre deux positions extrêmes X_m et $-X_m$. Sa position sera donc repérée par $X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$. Pour déterminer complètement $X(t)$, nous allons utiliser la *méthode complexe* qui consiste à associer à l'équation différentielle (1) l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{X}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau_e}\frac{\mathrm{d}\underline{X}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\underline{X} = \frac{F_m}{m}\exp[j(\omega t + \varphi_e)] = \frac{\underline{F_m}}{m}\exp(j\omega t) \tag{2}$$

dont la grandeur complexe $\underline{X}(t) = X(t) + jY(t)$ est solution. La solution que nous cherchons est alors la *partie réelle* de $\underline{X}(t)$.

1. Cette solution particulière de l'équation totale est appelée régime permanent ou régime forcé. Justifier cette appellation. Quand on revient à la solution générale de l'équation différentielle, le début de l'évolution (pendant quelques τ_e) est appelée régime transitoire. Justifier cette appellation.
2. Donner l'expression de $\underline{X}(t)$ ainsi que son amplitude complexe.
3. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}\underline{X}}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{X}}{\mathrm{d}t^2}$. Commentaires ?
4. Résolution numérique de l'équation :
   (a) Quelle condition doit vérifier l'amplitude complexe pour être solution de l'équation différentielle (2) ? En déduire l'expression de son module et de son argument.
   (b) En déduire l'expression de la vitesse complexe $\underline{V}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\underline{X}}{\mathrm{d}t}$, ainsi que l'impédance mécanique complexe $\underline{Z} = \underline{F_m}/\underline{V_m}$ où $\underline{F_m}$ et $\underline{V_m}$ sont les amplitudes complexes de la force et de la vitesse respectivement. Exprimer le module de $\underline{Z}$.
   (c) Pour quelle valeur de la fréquence l'impédance est minimale ? Calculer X_m lorsque l'extrémité S du ressort est excitée à la fréquence de résonance. Conclusion ?
   (d) Que se passerait-il s'il n'y avait pas d'amortissement ?
5. Résolution de l'équation différentielle par la construction de Fresnel :
   (a) Tracer le diagramme de Fresnel associé aux différentes grandeurs apparaissant dans l'équation différentielle (2).
   (b) Établir le déphasage $\varphi = \varphi_x - \varphi_e$ de l'oscillation par rapport à la force. Que vaut le déphasage à la fréquence de résonance ? Conclusion.
   (c) Retrouver l'amplitude X_m du mouvement.

3 – Circuit RLC série excité par une tension sinusoïdale

3.1 Equation différentielle.

A l'aide de la loi d'additivité des tensions, établir l'équation différentielle reliant $v(t)$ à $i(t)$. En déduire l'équation différentielle reliant $v(t)$ à $q(t)$. Commentaires ? Dans la suite, nous étudierons uniquement le régime forcé, c'est à dire le régime observé une fois le régime transitoire achevé.

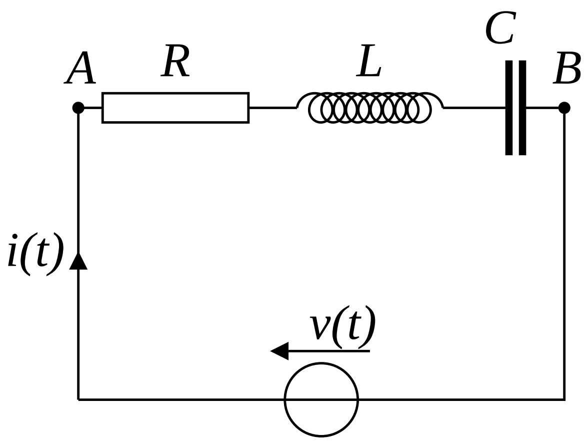

FIG. 3 – *Circuit RLC série excité par une tension sinusoïdale*

3.2 Régime forcé. Détermination de $\underline{I_m}$

1. En utilisant la notation complexe introduite dans l'exercice précédent, donner les expressions de $\underline{v(t)}$ et de $\underline{i(t)}$. On introduira les amplitudes complexes $\underline{V_m}$ et $\underline{I_m}$.
2. Que devient l'équation différentielle établie à la question 3.1 ?
3. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{I_m}$, son module I_m et son argument (on introduira $\varphi = \varphi_i - \varphi_v$).

3.3 Utilisation des impédances

1. Écrire les impédances $\underline{Z_R}$ de la résistance, $\underline{Z_L}$ de la bobine et $\underline{Z_C}$ du condensateur.
2. En utilisant les lois des circuits, retrouver l'amplitude complexe $\underline{I_m}$.

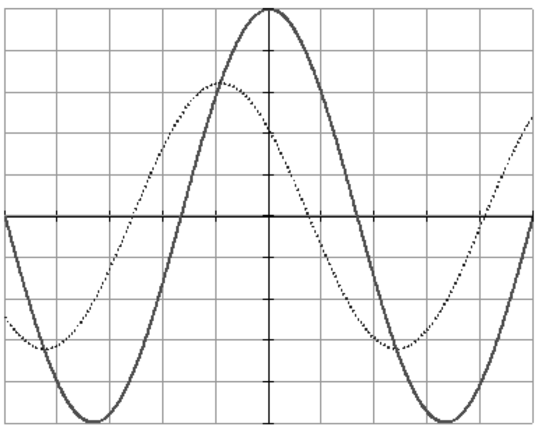

FIG. 4 – *Oscillogramme. Trait plein : tension $v(t)$ observée sur la voie 1. Trait pointillé : courant $i(t)$ observé sur la voie 2. Sensibilités des 2 voies : 1 V/division. Base de temps : 0,1 ms/division.*

3.4 Régime forcé. Étude de $I_m(\omega)$. Résonance.

1. Calculer I_m pour $f = 100$ Hz et $f = 1{,}5$ kHz. Commentaires ?

2. Etudier les variations du module I_m en fonction de la pulsation ω.

3.5 Régime forcé. Étude de $\varphi(\omega)$. Résonance.

Donner les expressions de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$. Etudier les variations de φ en fonction de ω. Commentaires ?

3.6 Étude expérimentale

1. On souhaite visualiser simultanément à l'oscilloscope la différence de potentiel $v(t)$ aux bornes du circuit RLC et l'intensité $i(t)$ qui le traverse. Indiquer sur la figure 3 les branchements à effectuer.
2. L'oscillogramme obtenu est représenté sur la figure 4. Mesurer sur l'oscillogramme la fréquence du signal excitateur $v(t)$ et sa pulsation. Mesurer V_m, I_m et φ. La tension est-elle en avance ou en retard par rapport au courant ?